SISTEMAS DE ECUACIONES
UNA META REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA PROFESIONAL

Esp. Prof. Caronía, Silvia; Berentt, Enzo ; Lesiw, Gerardo
Facultad de Ciencias Exactas Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones. Argentina
silca_100@fibertel.com.ar
Nivel educativo: Universitario
Palabras claves: institucionalización, análisis didáctico, sistemas de ecuaciones, registros de clases

RESUMEN

En el presente trabajo se analiza algunas cuestiones puntuales a posteriori del proceso de la Práctica Profesional, en este caso la observación de uno de los momentos de la clase: "la institucionalización" desde el punto de vista de la Teoría de las Situaciones didácticas de Guy Brousseau .
Se intenta realizar una meta reflexión que permitirá comprender aspectos que en un análisis a priori fueron estudiados, consensuados como referentes de los procesos teóricos didácticos- matemáticos que se encuentran íntimamente imbricados y cómo, a la hora de la puesta en escena, juegan los mismos.
Para provocar esta reflexión, se considera algunas cuestiones que surgieron en la clase de un practicante se intenta analizar, discutir y en "una nueva mirada", volver a cuestionarse, a partir de las intervenciones en clase y de la evaluación propuesta, qué efectos produjeron en los alumnos, cuáles fueron los procedimientos adoptados, qué puntos hoy parece necesario volver a replantear y en qué medida se suscitó la apropiación del conocimiento por parte del alumno.
Después de un tiempo, provocar éste análisis, llevará seguramente a la necesidad de redimensionar, valorar y entender los aportes fundamentales de la Didáctica de la Matemática que contribuyen en la formación del futuro docente
Para tener en cuenta lo mencionado precedentemente se utilizaron como insumo, los registros de clases efectuados por los alumnos practicantes y la docente de la Práctica sobre un tema desarrollado durante la misma: *sistemas de ecuaciones.*

Introducción

Es nuestra intención analizar sobre algunas cuestiones puntuales a posteriori del proceso de la práctica profesional, en este caso detenernos en uno de los momentos de la clase: "la institucionalización" desde el punto de vista de la Teoría de Las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau .
Para efectuar dicho análisis consideraremos uno de los conceptos desarrollados durante la práctica: *sistemas de ecuaciones,* observaremos algunas cuestiones que surgieron en una de las clases de un practicante para intentar luego provocar una reflexión, discutir y en "una nueva mirada", volver a cuestionarse, a partir de las intervenciones en clase y sus evaluaciones, qué efectos produjeron en los alumnos, cuáles fueron los procedimientos adoptados, qué puntos hoy parece necesario volver a replantearse y en qué medida se suscitó la apropiación del conocimiento por parte del alumno.
Para tener en cuenta lo mencionado precedentemente se utilizaron como insumo los registros de clases realizados por los alumnos practicantes, futuros docentes y docente de la práctica.

De todas las actividades desarrolladas comentaremos y analizaremos una de las clases de la práctica, en especial nos detendremos en uno de los momentos. el de "la institucionalización", que según la Teoría de las Situaciones

Didácticas de Brousseau es una de las instancias fundamentales en el proceso de enseñanza- aprendizaje. Respecto a éste concepto Panizza (2004) expresa que "*… es la posibilidad de establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural…*", supone además que su presentación no debería quedar desvinculado del trabajo efectuado anteriormente con los alumnos, por ello continúa expresando que …"*durante la institucionalización se deben sacar conclusiones […] recapitular, sistematizar, ordenar, vincular lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica, etc., afín de poder establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural…*"

Brosseau sostiene en general que para la construcción del conocimiento el alumno debe ser responsable de sus producciones pasando por otras etapas[3], antes de la intervención del docente en la institucionalización quién es el responsable de "oficializar el saber" que estuvieron trabajando los alumnos en las distintas instancias de la clase. Ello diferencia de una clase tradicional donde es el docente el que inicia definiendo el concepto a enseñar e inmediatamente supone que con los ejemplos ofrecidos logrará el aprendizaje por parte del estudiante. En esta propuesta se revierte dicho planteo.

Para el análisis de la clase se toma como ejemplo los registros de una de ellas observando la etapa de la institucionalización. Nos preguntamos así: ¿a que nivel se dio la misma? ¿que significó para el alumno que el docente oficialice los conceptos?, ¿a la hora de poner en práctica lo aprendido, el estudiante tuvo en cuenta lo desarrollado en la institucionalización? [4]

¿Cómo se pensaron las actividades para lograr la resignificación?

Sostenemos que para producir un aprendizaje en la enseñanza del sistema de ecuaciones es necesario replantear el tipo de actividades que darían significado a los conceptos, considerando en primer lugar la tarea de una ecuación con dos incógnitas y luego con los sistemas de ecuaciones y métodos de resolución.

Para ello se pensó en una actividad lúdica, esto es, un juego dónde se trata de trabajar una ecuación con dos incógnitas (ver anexo). Comprender este primer concepto conduce a dos vías: por un lado a la característica que exhibe infinitas soluciones y segundo preparar el camino para entender el significado de un sistema de

---

[3] llamadas situaciones adidácticas, ellas son: acción, formulación y validación. Sadovsky en su tesis cap 1 expresa:… *"El carácter de "adidáctico" remite a un tipo de vínculo con el medio, en el que el sujeto compromete esencialmente su sistema matemático de conocimientos. "Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro rehusa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas."(Brousseau, G; 1986 (1993) l). Como lo han señalado muchos autores, por ejemplo Margolinas la noción de "adidáctico" […] se refiere al tipo de compromiso que el alumno tiene con el medio y no alude al "silencio" del maestro sino al hecho de que, para dar lugar a la producción de conocimientos, el docente no explicita cuáles son los conocimientos que el alumno debe movilizar..".*

[4] Sadovsky manifiesta… *"Por otro lado, Brousseau atribuye al docente un papel esencial en el proceso de transformación de los conocimientos en saberes: "Fue así como "descubrimos"(¡!) lo que hacen todos los docentes en sus clases pero que nuestro esfuerzo de sistematización había hecho inconfesable: deben tomar nota de lo que han hecho los alumnos, describir lo que ha sucedido y lo que tiene una relación con el conocimiento al que se apunta, dar un estatuto a los acontecimientos de la clase, como resultado de los alumnos y como resultado del docente, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, relacionar esas producciones con los conocimientos de los otros (culturales o del programa), indicar que ellos pueden ser reutilizados .(...) La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: ese doble reconocimiento constituye el objeto de la INSTITUCIONALIZACIÓN."(1988 b).*

ecuaciones. ¿Cómo?, se propuso otra consigna: que a la primera ecuación se le agregara una segunda las que juntas conducirían a presentar el sistema de ecuaciones y su resolución por alguno de los métodos posibles.

Las actividades estuvieron secuenciadas para dar sentido a los conceptos que se pretendía enseñar[5] y a lograr que los alumnos trabajaran y se responsabilizaran de sus producciones en los distintos momentos de la clase para después converger en la puesta en común, lugar dónde los alumnos exponen y discuten las elaboraciones que producen, siendo las mismas una aproximación al conocimiento que se busca enseñar.

Se tuvo especial cuidado que, a través de las actividades, el alumno lograra hallar el conjunto solución, aún sin conocer por el momento cuál era el método que estaba utilizando debiendo ser el docente quién lo condujera a ello para luego discutir cual o cuales serían las técnicas más convenientes para la resolución de los mismos, cuestión ésta sobre la que no se reflexiona en la enseñanza tradicional y se presentan los métodos independientes como si no existiera lo posibilidad de trabajarlas en forma combinada.

Registro y observación de la institucionalización en la clase mencionada

Como lo que se pretende institucionalizar es extenso, con muchos puntos que el docente debe remarcar, para este momento fue necesario ir dialogando, y a su vez instalando mini institucionalizaciones. En este caso el docente inicia mencionando lo que se estuvo trabajando en clases anteriores y procura establecer a partir de las mismas, las características que presentan las ecuaciones con dos incógnitas, cuando dice:

P: ¿recuerdan que comenzamos trabajando con la ecuación $x+2y=47$? Luego de ésta les di muchas otras de forma similar $x + 4y = 81$ $3x + 2y = 84$…(pone otras mas)
A: profe… veo que aparecen en todas x e y?
P si en todas aparecen "x" e "y" y están igualadas a un número. Si queremos escribir la forma general podemos usar letras por ejemplo: $ax + by = c$
P: "x" e "y" son las incógnitas de la ecuación a y b son números reales cualesquiera y son los coeficientes de las incógnitas. Esta es la forma general de una ecuación de primer grado con 2 incógnitas.
P: Pero ¿que pasó? ¿Pudieron encontrar los números que pensé?
Todos: Nooo…
P: No pudieron. ¿se acuerdan? los distintos grupos encontraron valores de "x" e "y" pero no eran los que pensé, por ejemplo encontraron:
$x = 45$ $x = 37$ $x = 7$
$y = 1$ $y = 5$ $y = 20$
P: Ustedes encontraron varios pares de números que son solución de la ecuación que les di, esto se debe a que una ecuación con 2 incógnitas tiene infinitas soluciones.

Estas cuestiones que va aludiendo apuntan a caracterizar que la ecuación con dos incógnitas presenta infinitas soluciones. Se observa a los alumnos participar e interrogar sobre puntos que el docente destacará luego cuando dicen: … "*pero en todos dio profe… y fueron muchos los que encontramos eso…. ¿por qué es…"*. En este momento el docente se encarga de ir remarcando que todas son soluciones de la ecuación cuando manifiesta: *…Ustedes encontraron varios pares de números que son solución de la ecuación que les di, esto se debe a que una ecuación con 2 incógnitas tiene infinitas soluciones...*

[5] Si bien las actividades son propuestas y trabajadas con anterioridad se las consideran flexibles y en muchos casos dependiendo del grupo con el que se trabaje se vuelven a realizar modificaciones.

En el momento que el profesor dice… *Pero ¿que pasó? ¿Pudieron encontrar los números que pensé? Todos: Nooo…* Con la pregunta lo que pretende es conducirlos más adelante a los sistemas de ecuaciones. Con ese objetivo vuelve a la pregunta inicial para que el alumno relacione con lo trabajado anteriormente para dejar sentado el concepto que pretende enseñar.

P: Por lo que vi ningún grupo encontró el par 13 y 17. ¿qué pasó?
P: Para que puedan encontrarlo di otra ecuación que junto con la primera permitió hallar el par de números que pensé.

$$\begin{cases} x + 2y = 47 \\ x + 4y = 81 \end{cases}$$

P: Estas 2 ecuaciones, juntas, forman un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. La llave indica que se buscan los valores de "x" e "y" que verifiquen ambas ecuaciones a la vez.
P: La forma general es:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Donde a, b, c, d, e, f son números reales. "x" e "y" son las incógnitas del sistema. a, b, d, e, son los coeficientes de las incógnitas, c y f son términos independientes.
P: Como aún así nadie pudo encontrar los números que pensé, les di un listado de pares de números hallados por otros alumnos de otro curso, donde algunos cumplían la primer ecuación, otros la segunda y solo un par cumplía las 2 ecuaciones. Este era el par 13,17
P: Este par de números es la solución del sistema y, en este caso, es el único par de números que verifica las 2 ecuaciones simultáneamente.

$$x = 13$$
$$y = 17$$

[….]
P: Luego en la consigna 4 encontraron pistas que solo tengan "y" Por ejemplo, restaron las ecuaciones iniciales:

$$\begin{array}{rl} - & x + 4y = 81 \\ & \underline{x + 2y = 47} \\ & 2y = 34 \end{array}$$

P: Luego buscaron una ecuación que solo tenga x. Usaron una ecuación que era múltiplo de una inicial y restaron a la otra (inicial):

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 94 \\ \underline{x + 4y = 81} \\ x = 13 \ \ (*) \end{array}$$

P: ¿Que pudimos obtener realizando estas operaciones?
As: Los números que pensó.
P: Bien, así pudimos obtener los valores x = 13 e y = 17. Son los números que pensé y es la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 47 \\ x + 4y = 81 \end{cases}$$

P: La solución de éste sistema de ecuaciones en particular es el par de números que verifican las 2 ecuaciones al mismo tiempo. Con la solución encontrada podemos escribir de la siguiente manera

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 17 \end{cases}$$

P: En este sistema podemos apreciar los valores de "x" e "y". Este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema inicial.¿porqué?
P: porqué un sistema es equivalente a otro si tiene exactamente el mismo conjunto solución.

P: Estos sistemas que fuimos trabajando [muestra el profesor (*)] *tienen la misma solución, x = 13 e y = 17.*
P: Las operaciones válidas que utilizamos para encontrar la solución de un sistema y que permiten encontrar sistemas de ecuaciones equivalentes son: multiplicar o dividir a una ecuación por un número distinto de cero y sumar o restar a una ecuación un múltiplo de la otra. (**)

El docente pretende hacer notar que una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y un sistema de ecuaciones con dos incógnitas una sola solución (para este ejemplo), se nota cuando expresa. …" *Este par de números es la solución del sistema y, en este caso, es el único par de números que verifica las 2 ecuaciones simultáneamente…*".

Además con las producciones que fueron realizando (*) retoma para dar significado al concepto de ecuaciones equivalentes por ejemplo cuando expresa: … *P: Luego en la consigna 4 encontraron pistas que solo tengan "y" Por ejemplo, restaron las ecuaciones iniciales:…*

Volviendo a observar lo desarrollado (**) entendemos que el profesor debería haberse detenido, hacerlos reflexionar del ¿porqué se deben realizar estas operaciones, que se pretende con las mismas? Queda a nivel de mención y hubiera sido conveniente a través de los ejemplos trabajados observar dónde se aplicaron las operaciones válidas o permitidas -el alumno lo hizo sin tener presentes las mismas- que se puedan efectuar, para arribar a sistemas equivalentes y encontrar los valores de las incógnitas.

Por último tomando lo trabajado muestra el método utilizado dando significado a la resolución de un sistema de ecuaciones a través de uno de los métodos, como vemos a continuación:

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 47 \\ x + 4y = 81 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} - \; x + 4y = 81 \\ \underline{x + 2y = 47} \\ 2y = 34 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad y = 17$$

P: El procedimiento utilizado se denomina "Método de reducción por sumas y restas" y consiste en encontrar una ecuación que posea solo una de las variables del sistema. Luego encontrar el valor de la otra variable repitiendo el mismo procedimiento.
A: profe…? Y si sabemos el valor de y ¿podemos utilizarlo en la ecuación para encontrar x?
P: muy bien así es, este valor se puede reemplazar en una de las dos ecuaciones:

$x + 2(17) = 47$
$x + 34 = 47$
$x + 34 - 34 = 47 - 34$
$x = 13$

Un alumno propone otro recurso para encontrar el valor de la incógnita faltante a lo que el docente asiente. Cabe destacar que esto ocurrió sin que éste lo mencionara. En este caso el alumno ha sido capaz de transferir otro concepto aprendido, como ser el tema de ecuaciones con una incógnita. El docente continúa diciendo:

P: entonces otra forma de buscar el valor de una variable es, una vez que conocemos el valor de una de ellas, por ejemplo "y", se puede reemplazar este valor en una de las ecuaciones del sistema y encontrar el valor de la variable restante, en este caso "x".
P: y se encuentra el sistema equivalente en el cual podemos ver las soluciones. Si realizamos de esta forma estamos utilizando una combinación de métodos pues, primero, para encontrar el valor de "y" utilizamos el

método de reducción y luego para encontrar el valor de "x" utilizamos otro método que llamamos método de "sustitución"

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 17 \end{cases}$$

Esto último que les he explicado depende de la forma que tenga el sistema de ecuaciones. Primero hay que observar y luego ver cuál será el método más conveniente a elegir para encontrar la solución

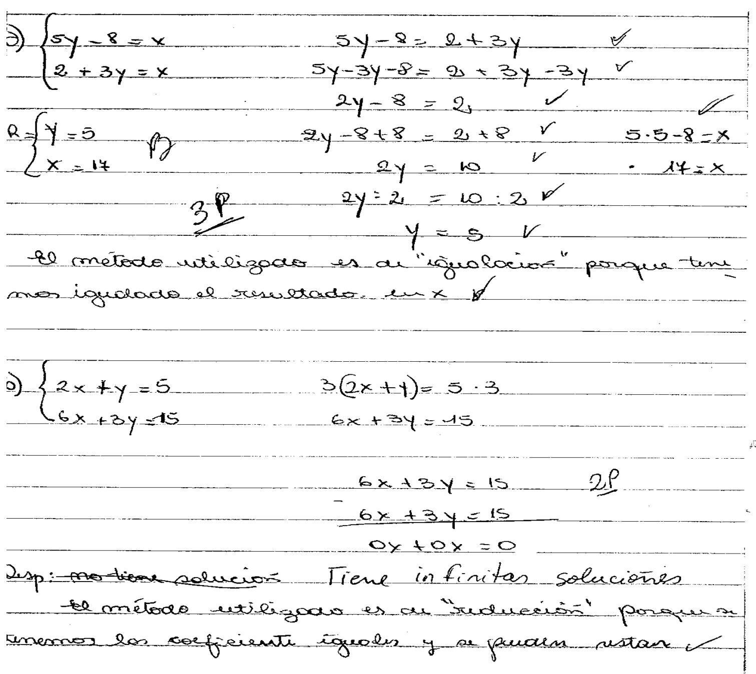
Luego de este trabajo se presentaron actividades donde se discutieron con más profundidad el *"Método de reducción por sumas y restas"* y *el* de *sustitución*. Para finalizar el tema el docente propuso ejercicios de refuerzo para que los resolvieran por el método más conveniente y justificaran su elección[6].

Finalizado el desarrollo del tema…

¿Qué efectos se produjeron en los alumnos, cuáles fueron los métodos adoptados, en qué medida se suscitó la apropiación del conocimiento por parte del alumno?.

Para tener en cuenta lo mencionado precedentemente se muestran algunos procedimientos utilizados en una de las preguntas hechas en los exámenes realizados por los alumnos, dando cuenta o no de la apropiación de los conocimientos desarrollados

Evaluación[7]: *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones y explicar ¿cuál es el método utilizado y porqué le resulta el más conveniente para encontrar el valor de las incógnitas?*


a) $\begin{cases} 5y - 8 = x \\ 2 + 3y = x \end{cases}$

$5y - 8 = 2 + 3y$ ✓

$5y - 3y - 8 = 2 + 3y - 3y$ ✓

$2y - 8 = 2$ ✓

$2y - 8 + 8 = 2 + 8$ ✓

$2y = 10$ ✓

$2y : 2 = 10 : 2$ ✓

$y = 5$ ✓

R = $\begin{cases} y = 5 \\ x = 17 \end{cases}$

$5 \cdot 5 - 8 = x$

$17 = x$

3P

El método utilizado es el "igualación" porque tenemos igualado el resultado en x ✓

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

$3(2x + y) = 5 \cdot 3$

$6x + 3y = 15$

$6x + 3y = 15$

$-\ 6x + 3y = 15$

$0x + 0x = 0$

2P

Rsp: ~~no tiene solución~~ Tiene infinitas soluciones

El método utilizado es el "reducción" porque tenemos los coeficientes iguales y se pueden restar ✓

Conclusiones

La *institucionalización* es un momento especial de la clase en que el docente debe: Responsabilizarse, *sacar conclusiones*.

6 En este caso solo se ha mostrado dos de los métodos de resolución

7 Se toma como ejemplo la evaluación hecha por un alumno

Es de destacar que en los temas trabajados al ser complejos, existen varios conceptos relacionados, elementos y características que el docente necesariamente debe institucionalizar. Es de observar que esta etapa, no necesariamente debe hacerse siempre al final de toda la actividad, podría concebirla de a poco con mini institucionalizaciones, como ha sucedido en esta clase.

Se ha observado la importancia de encarar actividades donde se puedan discutir dentro de los sistemas de ecuaciones, el método más conveniente de aplicar a fin de dar sentido a lo trabajado para que no se convierta en algo mecánico y sin significado.

Es importante efectuar una reflexión sobre el significado de encontrar sistemas de ecuaciones equivalentes para que no quede lo aprendido como algo formal sin sentido, privado de la comprensión de sus aplicaciones prácticas.

Por último realizar una meta reflexión aportó a nuestro entender, comprender aspectos que en un análisis a priori han sido estudiados, analizados, consensuados y "comprendidos" como los referentes a los procesos teóricos didácticos- matemáticos que se encuentran íntimamente imbricados y cómo a la hora de la puesta en escena juegan los mismos. No obstante de realizar dicho análisis se ha visto que es importante la flexibilidad en las consignas, ya que dependen de los estudiantes con los que se está trabajando.

Éste análisis, nos llevó a redimensionar, valorar y entender los aportes fundamentales de la Didáctica de la Matemática que contribuyen sin lugar a duda a la formación del futuro docente.

Referencias Bibliográficas

ALONSO F. BARBERO, C. y otros Grupo AZARQUIEL (1993): *"ideas y actividades para enseñar Álgebra".* Edit Síntesis

BROUSSEAU, G (1999). *"Educación y Didáctica de las Matemáticas*" Trabajo presentado en el *V Congreso Nacional de Investigación Educativa.* Aguascalientes, México

PANIZZA,M- SAIZ, I (COMP.) (2003): "Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el Primer ciclo de la EGB: Análisis y propuestas. Editorial: Paidós.

PANIZZA, M- SADOVSKY, P- SESSA, C. (1996): "Los primeros aprendizajes algebraicos. El fracaso del éxito". Comunicación presentada a la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, Salta. Versión en ingles: The first algebraic learning. The failure of success. Proceedings of the 20 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. University of Valencia, Sapain.

SADOVSKY, P. (2004) Tesis doctoral "condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas". Capítulo 1: "Marco didáctico general: La Teoría de Situaciones".

Anexo

ACTIVIDAD 3: “Dando Pistas” [8]

Consigna 1:

He pensado dos números, que llamo “x” e “y”. La siguiente ecuación es una pista para averiguarlos:
$X + 2Y = 47$
Encuentren cuáles son esos números.

Consigna 2:
Como nadie descubrió los números que pensé, agrego a la anterior, otra pista:
$$x + 4y = 81$$
Cuando hayas averiguado los números no se lo digan a nadie.
Construyan ustedes otras ecuaciones que proporcionen nuevas pistas.

Consigna 2b (opcional)
Los siguientes pares de números fueron planteados por alumnos de otra división:

(-7, 22)	(13, 17)
(-3,21)	(-1, 24)
(1, 20)	(5, 19)
(9, 18)	(-3, 25)
(5, 22)	(7, 20)

Averigüen si entre estos se encuentran los números que pensó el profesor

Consigna 3
En otro curso trabajamos con las mismas ecuaciones:
$X + 2Y = 47$
$X + 4Y = 81$

Ellos obtuvieron las siguientes pistas:
$2x + 4y = 94$
$3x + 12y = 243$
$2x + 6y = 128$
$3x + 10y = 209$
$5x + 16y = 337$

a) Analizar la validez de las mismas.
b) ¿Es posible obtener estas pistas relacionando las pistas dadas por el profesor?

Consigna 4
a) ¿Podrían establecer (o encontrar) una nueva pista que solo tenga “y”, trabajando con las ecuaciones dadas inicialmente?

a) “¿Podrían establecer (o encontrar) una nueva pista que solo tenga “x”, trabajando con las ecuaciones dadas inicialmente?”.

[8] Las actividades propuestas han sido extraídas del texto: Alonso F. Barbero, C. y otros Grupo AZARQUIEL (1993): “ideas y actividades para enseñar Álgebra”. Edit Síntesis, y trabajadas en las asignaturas Taller II y Seminario III